

Corrigé MathSups - Exercice type bac

Fonctions - sujet 13, exercice 1

Partie A

Dans cette partie, les réponses se lisent sur la courbe de la dérivée f' .

1. Sens de variation de f .

La fonction f est croissante lorsque f' est positive, et décroissante lorsque f' est négative.

Par lecture graphique, f' s'annule environ pour

$$x \simeq 0,4 \quad \text{et} \quad x \simeq 2,6.$$

On lit donc :

x	$] -\infty; 0,4[$	$] 0,4; 2,6[$	$] 2,6; +\infty[$
$f'(x)$	+	-	+
f	croissante	décroissante	croissante

Ainsi, f est croissante sur $] -\infty; 0,4[$, décroissante sur $] 0,4; 2,6[$, puis croissante sur $] 2,6; +\infty[$.

2. Convexité de f .

Une fonction est convexe sur les intervalles où sa dérivée est croissante. Sur le graphique, la courbe de f' est croissante avant -1 , puis de nouveau après 2 .

La fonction f semble donc convexe sur $] -\infty; -1]$ et sur $] 2; +\infty[$.

Partie B

On étudie maintenant la fonction

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6) e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.a. Limite en $+\infty$.

On a

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le facteur entre parenthèses tend vers 1, donc $x^2 - 5x + 6 \rightarrow +\infty$. De plus, $e^x \rightarrow +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

1.b. Limite en $-\infty$.

Pour $x \neq 0$,

$$f(x) = x^2 e^x \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, on sait que $x^2 e^x \rightarrow 0$, tandis que

$$1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \rightarrow 1.$$

Par produit,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$$

2. Dérivée.

La fonction f est un produit. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 6) e^x \\ &= (2x - 5 + x^2 - 5x + 6) e^x \\ &= (x^2 - 3x + 1) e^x. \end{aligned}$$

Pour tout réel x , $f'(x) = (x^2 - 3x + 1) e^x$.

3. Variations de f .

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - 3x + 1$.

Son discriminant vaut

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5.$$

Les deux racines sont

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Le coefficient dominant du trinôme est positif, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 1$	+	0	-	0	+
e^x	+		+		+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		↗		↘	

La fonction f est donc croissante sur $] -\infty ; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha ; \beta]$, puis croissante sur $[\beta ; +\infty [$.

4. Tangente en 0.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Or

$$f(0) = (0^2 - 5 \times 0 + 6) e^0 = 6,$$

et

$$f'(0) = (0^2 - 3 \times 0 + 1) e^0 = 1.$$

Ainsi,

$$y = 1(x - 0) + 6.$$

La tangente a pour équation réduite $y = x + 6$.

5.a. Convexité de f .

On admet que

$$f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x.$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , le signe de $f''(x)$ est celui de $(x + 1)(x - 2)$.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 2$	-		-	0	+
e^x	+		+		+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
f		convexe		concave	

La fonction f est convexe sur $] -\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty [$, et concave sur $[-1 ; 2]$.

5.b. Inégalité sur $[-1 ; 2]$.

Sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, la fonction f est concave. La courbe d'une fonction concave est située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle considéré.

Or $0 \in [-1 ; 2]$, et la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 6$.

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [-1 ; 2], \quad f(x) \leq x + 6}$$